

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian :180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi có 1 trang, gồm 5 câu)

Ngày thi: 7 tháng 12 năm 2020

Câu 1(2 điểm)

a) Cho dãy số $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3, \forall n \geq 1$. Tính a_n theo n .

b) Cho dãy số $u_1 = \frac{1}{5}, u_{n+1} = \frac{2021u_n}{2020u_n + 1}; \forall n \geq 1$. Tìm $\lim u_n$.

Câu 2 (2,5 điểm)

a) Tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF và P là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng. Chứng minh rằng các đường tròn (PAD), (PBE), (PCF) có trục đẳng phương chung.

b) Từ điểm S nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến SC và SH (C và H là tiếp điểm) và một cát tuyến SBA đến (O) (B nằm giữa S và A). Vẽ đường kính CD của (O), E là giao điểm của SO và BD. Chứng minh rằng AD song song với CE.

Câu 3(1,5 điểm) Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n là số các bộ số nguyên

(a_1, a_2, \dots, a_n) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau đây:

1) $|a_i| \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$

2) $|a_i - a_{i+1}| \leq 1, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$

Tìm giá trị của S_1, S_2 và tìm S_n theo n .

Câu 4(3 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố lẻ của $n^4 + 1$ (n là số tự nhiên) thì p chia cho 8 dư 1.

b) Tìm các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p sao cho $xy^3 = p(x + y)$

Câu 5(1 điểm) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

-----Hết-----

